Knotenfärbung

- Def.: Eine Knotenfärbung eines Graphen $G=(V,E)$ mit k Farben ist eine Abbildung $c:V\to\{1,\ldots,k\}$, so dass $c(u)\neq c(v)$ für alle $\{u,v\}\in E$.
  - Die chromatische Zahl $\chi(G)$ eines Graphen G ist die minimale Anzahl von Farben, die für eine Knotenfärbung von G benötigt wird.
  - $c^{-1}(i)\subseteq V$ heißt die i-te Farbklasse von c.
- Anwendungen (Konfliktgraphen)
  - Mobilfunk (Zuordnung von Frequenzen zu Sendern)
  - Compilerbau (Zuordnung von Registern zu Variablen)
  - Scheduling (Zuordnung von Ressourcen zu Aufgaben)

Abschätzungen

- Einfache Überlegungen
  - Sei $\alpha(G)$ die Kardinalität der größten unabhängigen Menge in G und $\omega(G)$ die Kardinalität der größten Clique in G
  - $\chi(G) \geq 2 \Leftrightarrow |E| \geq 1$
  - $\chi(G) \geq 3 \Leftrightarrow$ G ist nicht bipartit $\Leftrightarrow$ G enthält Kreis ungerader Länge
  - $\chi(G) \geq \omega(G)$
- Untere und obere Schranke
  - Jede Farbklasse ist eine unabhängige Menge
  - Untere Schranke $\chi(G) \geq \max\left\{\omega(G), \frac{n}{\alpha(G)}\right\}$
  - Obere Schranke $\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2|E| + \frac{1}{4}}$

Ein Greedy-Algorithmus

- Wähle gültige Farbe mit niedrigstem Index
  - $\forall v \in V$: $c(v)=0$
  - While $\exists v \in V$: $c(v)=0$
  - $\quad c(v)=\min\{k \in \{1,2,\ldots\} : k \neq c(u)$ für alle $u \in N(v)\}$
  - Endwhile
- Lineare Laufzeit
- $\chi(G) \leq Alg(G) \leq \Delta(G)+1$ wobei $\Delta(G)=\max_{v \in V}(\deg(v))$
- Satz: Zu jedem Graphen existiert eine Knotenfolge, so dass der Algorithmus mit $\chi(G)$ Farben auskommt.
  - Beweis: Durchlaufe jede Farbklasse vollständig

Satz von Brooks

- In vollständigen Graphen und Kreisen ungerader Länge wird jeweils eine Farbe mehr als der maximale Knotengrad benötigt.
  - Vollständige Graphen: $\chi(K_n)=n=\Delta(G)+1$
  - Ungerade Kreise: $\chi(C_{2n+1})=3=\Delta(G)+1$
- Im folgenden Satz wird gezeigt, dass dies die einzigen zusammenhängenden Graphen mit dieser Eigenschaft sind.
- Satz (Brooks, 1941): Sei G ein zusammenhängender Graph, so dass $G \neq K_n$ und $G \neq C_{2n+1}$. Dann gilt $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

Beweis des Satzes von Brooks

- Notation:
  - $A+v=A\cup\{v\}$
  - $A-v=A\setminus\{v\}$
  - $G-v=G[V\setminus\{v\}]$
  - $G+vw=(V,E\cup\{\{v,w\}\})$
- $\Delta=\Delta(G)$
- $\Delta\leq 2$: ein Knoten, Pfad oder Kreis, also sei $\Delta\geq 3$
- Induktion über $n=|V|$
  - Anfang: K_4
  - Annahme: Alle Graphen mit höchstens n Knoten sind Cliquen mit $\Delta+1$ Knoten oder Δ-färbbar

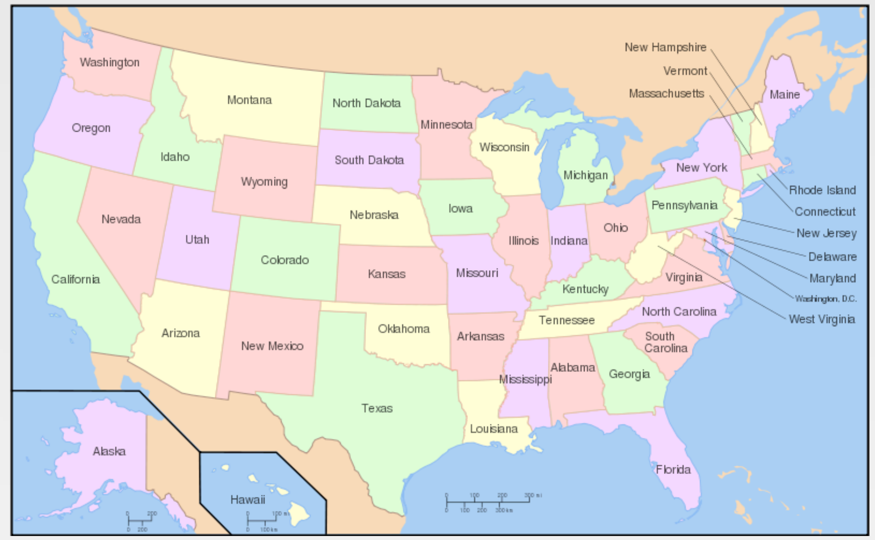
- 1. Fall: ∃v: G-v ist nicht zusammenhängend
  - Sei A eine Zusammenhangskomponente in G-v und B=V-A-v
  - Aus der Annahme folgt, dass A+v und B+v entweder Cliquen mit Δ+1 Knoten oder Δ-färbbar sind
  - Der erste Fall kann nicht eintreten, da v mit jeweils mindestens einem Knoten aus A und B verbunden ist
  - Färbe A+v und B+v getrennt, benennen die Farben so um, dass v in beiden Färbungen die gleiche Farbe hat und setze die Färbungen zusammen.

- 2. Fall: Nicht Fall 1 und $\exists v,w$: $\{v,w\} \notin E$ und G-v-w ist nicht zusammenhängend
  - Sei A eine Zusammenhangskomponente in G-v-w und B=V-A-v-w
  - v und w sind jeweils mit mind. einem Knoten aus A und B verbunden
  - G_1=G-B und G_2=G-A
  - $\Delta(G_1+vw)=\Delta(G_2+vw)=\Delta$
  - G_1+vw und G_2+vw sind Cliquen mit Δ+1 Knoten oder Δ-färbbar (Annahme)
  - Fall 2.1: Beide Graphen sind Δ-färbbar
    - Es gibt Δ-Färbungen in denen v und w jeweils unterschiedliche Farben haben
    - Umbenennen der Farben und zusammensetzen
  - Fall 2.2: Einer der Graphen (G_1+vw) ist Clique mit Δ+1 Knoten
    - v und w sind jeweils mit genau einem Knoten in B verbunden
    - Es gibt eine Δ-Färbung von G_2, in der v und w die gleiche Farbe haben (Kontraktion & Annahme)
    - Das gleiche gilt für G_1 (vollständiger Graph mit einer fehlenden Kante)
    - Umbenennen der Farben und zusammensetzen

- 3. Fall: $\forall v,w$ mit $\{v,w\}\notin E$: $G-v-w$ ist zusammenhängend
    - Wähle u, so dass $\deg(u)=\Delta$
    - Wenn alle Nachbarn von u verbunden sind, ist G vollständig (Zusammenhang und maximaler Knotengrad Δ)
    - Also seien v,w nicht benachbarte Nachbarn von u
    - $v_1=v$, $v_2=w$, $v_{n+1}=u$
    - Wähle v_i, so dass v_i einen Nachbarn in $\{v_{i+1}, \dots, v_{n+1}\}$ hat (möglich, da $G-v-w$ zusammenhängend)
    - Wende den Greedy-Algorithmus auf $v_1, \dots, v_{n+1}$ an
        - $c(v_1)=c(v_2)=1$
        - Für jeden Knoten $v_3, \dots, v_n$ wurden höchstens $\Delta-1$ der Nachbarn bereits gefärbt, es werden also nicht mehr als Δ Farben verwendet
        - Alle Δ Nachbarn von v_{n+1} wurden gefärbt, zwei davon (v und w) mit derselben Farbe $\Rightarrow$ Eine der Δ Farben steht zur Verfügung

q.e.d.

Vierfarbensatz



- Färben von Landkarten, so dass benachbarte Länder nicht dieselbe Farbe haben
  - Modellierung durch planare Graphen (Graphen, die man überschneidungsfrei in der Ebene zeichnen kann)
- Vermutung von 1852: Es genügen vier Farben.
- Satz (Appel und Haken, 1977): Für jeden planaren Graphen G ist $\chi(G) \leq 4$.
  - Überprüfung von 1936 Graphen (später 1476) durch einen Computer
  - 4-Färbungsalgorithmus für planare Graphen mit Laufzeit $O(|V|^2)$